



Universidade Federal de Pernambuco
Departamento de Física

Exame Geral de Doutorado
Segundo semestre de 2024

Mecânica Quântica

07/08/2024 - 09:00 às 12:00

(Escolha três dentre as quatro questões)

QUESTÃO 1: FUNÇÃO DE ONDA

Considere um elétron confinado em uma caixa unidimensional cujo potencial é dado por: $V = 0$ na região $0 < x < L$ e $V = \infty$ em $x \leq 0$ e $x \geq L$. A função de onda do elétron no instante $t = 0$ é

$$\psi(x, 0) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{L}} & 0 < x < L, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

(a) (20%) Mostre que os autoestados de energia e as possíveis energias do sistema são

$$\phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

e

$$E_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2mL^2}, \quad \text{com } n = 1, 2, 3, \dots,$$

respectivamente.

(b) (40%) Se uma medida de energia é realizada no instante $t = 0$, qual a probabilidade $P_n(t = 0)$ do resultado dessa medição ser E_n ?

(c) (40%) Encontre a função de onda $\psi(x, t)$ do elétron em um tempo t qualquer e a probabilidade $P_n(t)$.

Dado:

$$\int \sin^2(kx) \, dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2kx)}{4k} + \text{constante}$$

QUESTÃO 2: SOMA DE MOMENTO ANGULAR

Considerando a correção da interação spin-órbita, assuma que o elétron de um átomo de Hidrogênio se encontra em um certo autoestado de energia dado por $|n, \ell, j, m_j\rangle$. Aqui, n, ℓ, j e m_j são os números quânticos: principal, do momento angular orbital, do momento angular total (orbital+spin) e do momento angular total na direção z , respectivamente. Sabendo que em uma medição do seu momento angular orbital, o resultado obtido foi de $L^2 = 2\hbar^2$, responda:

- (a) (30%) Quais os possíveis estados $\{|n, \ell, j, m_j\rangle\}$ que são compatíveis com o resultado dessa medição?
 - (b) (50%) Dentre os estados obtidos no item (a), considere os de maior momento angular total que possuem $m_j = 3/2$ e $m_j = 1/2$. Represente esses estados em termos da base $\{|m_\ell, m_s\rangle\}$, i.e., base de autovetores de \hat{L}_z e \hat{S}_z .
 - (c) (20%) Considere que uma medida de L_z e S_z é realizada nesse sistema. Para cada um dos estados encontrados no item (b), obtenha quais os possíveis resultados dessa medição e suas respectivas probabilidades.
-

Dados:

$$J_+|j, m_j\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1) - m_j(m_j+1)}|j, m_j+1\rangle$$

$$J_-|j, m_j\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1) - m_j(m_j-1)}|j, m_j-1\rangle$$

QUESTÃO 3: ESTADO COERENTE

Um estado coerente de um oscilador harmônico unidimensional é definido como um autoestado do operador de abaixamento \hat{a} com autovalor λ :

$$\hat{a} |\lambda\rangle = \lambda |\lambda\rangle,$$

onde λ é um número complexo e $\hat{a} |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle$, sendo $|n\rangle$ um autoestado do oscilador harmônico.

(a) (40%) Prove que

$$|\lambda\rangle = e^{-|\lambda|^2/2} e^{\lambda \hat{a}^\dagger} |0\rangle.$$

é um estado coerente normalizado. Dado: $\hat{a}^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle$.

(b) (30%) Suponha que em $t = 0$ o sistema foi preparado no estado $|\alpha(0)\rangle = |\lambda\rangle$, para um dado valor de λ . Determine o estado $|\alpha(t)\rangle$ para tempos posteriores. Mostre que ele permanece um estado coerente, ou seja, que ele permanece sendo um autoestado do operador \hat{a} , mas com um novo autovalor $\lambda(t)$. Determine esse novo autovalor.

(c) (30%) Calcule o valor médio $\langle \hat{x} \rangle$ do operador $\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger)$ para o estado $|\alpha(t)\rangle$ e mostre que

$$\langle \hat{x} \rangle = \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} |\lambda| \cos(\omega t - \delta),$$

onde $\lambda = |\lambda| e^{i\delta}$, m é a massa e ω é a frequência do oscilador harmônico. Ou seja, o centro do pacote de onda do estado $|\alpha(t)\rangle$ move-se como se fosse uma partícula clássica.

QUESTÃO 4: TEORIA DE PERTURBAÇÃO INDEPENDENTE DO TEMPO

Considere um sistema com Hamiltoniano

$$\hat{H}_0 = \begin{pmatrix} \epsilon_a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \epsilon_c \end{pmatrix}, \quad (1)$$

onde $\epsilon_a < \epsilon_b < \epsilon_c$. Denotaremos os autoestados de \hat{H}_0 como $|a\rangle$, $|b\rangle$, $|c_1\rangle$ e $|c_2\rangle$, onde $\hat{H}_0 |a\rangle = \epsilon_a |a\rangle$, $\hat{H}_0 |b\rangle = \epsilon_b |b\rangle$, $\hat{H}_0 |c_1\rangle = \epsilon_c |c_1\rangle$ e $\hat{H}_0 |c_2\rangle = \epsilon_c |c_2\rangle$. Suponha que esse sistema é sujeito a uma perturbação

$$\hat{V} = \begin{pmatrix} 0 & v_{ab} & 0 & 0 \\ v_{ba} & v_{bb} & 0 & v_{bc} \\ 0 & 0 & 0 & g \\ 0 & v_{cb} & g & 0 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

onde os parâmetros v_{ij} e g são não nulos. O Hamiltoniano total será $\hat{H} = \hat{H}_0 + \lambda \hat{V}$, onde λ é um parâmetro pequeno. Usando teoria de perturbação independente do tempo, calcule:

- (a) (40%) A correção indo até segunda ordem em λ para a energia do nível $|a\rangle$. Essa correção vai aumentar ou diminuir a energia?
- (b) (30%) A correção indo até primeira ordem em λ para o autovetor $|a\rangle$.
- (c) (30%) A correção até primeira ordem em λ para a energia dos níveis degenerados $|c_1\rangle$ e $|c_2\rangle$.